

骨格曲線を外生的に与えたときの非線形動的解析法に関する検討

大阪建設局 建設企画部 設計課 袴田文雄
京都建設事務所 伏見工事事務所 中村忠春
大阪建設局 建設企画部 設計課 志村敦

要 旨

兵庫県南部地震後の構造物設計では、従来に増して多自由度の非線形動的解析を必要とされることが多い。従来、構造物の非線形挙動を解析するにあたっては、材料非線形をバイリニアなど線形の組み合わせに近似して扱われる。しかし、じん性の大きな構造物では、バイリニア近似は実態と相似でないことがある。そこで、実験あるいは実験を反映させた解析法において求められた骨格曲線を、直接、解析法に取り入れたときの多自由度非線形応答の計算方法について検討した。じん性が大きな領域まで取り扱えると、骨格曲線において負の剛性が生じることがあり、これについて検討した。さらに多自由度で複数の非線形挙動が生じたときの収束計算方法について、また、これらを簡便的に使える設計環境実現について、検討したところを述べる。

キーワード：耐震設計、多自由度、非線形解析、動的解析、負の剛性

1 はじめに

兵庫県南部地震以降、構造物の耐震設計においては、構造物に非線形領域での挙動を許した耐震設計が行われることになった。この地震以前でも構造物の非線形挙動に関しては、特に長大橋や特殊な構造を有する橋梁において、動的な解析を行うことはあったが、設計法として広く認識されるころではなかった。また、その解釈において普遍的なものではなかったとも考えられる。

とくに、兵庫県南部地震以降の構造物の特徴の一つに、帯鉄筋を十分に配することが合意されたことにより、じん性を向上させた構造物が多く現れたことがあげられる。そこでは、特に非線形領域における実挙動を把握する必要が生じた。

従来、構造物の非線形挙動を解析するにあたっては、材料非線形をバイリニアなど直線の組み合わせに近似して扱うことが多い。しかし、じん性

の大きな構造物などでは、直線の組み合わせ近似では実態と相似でないことがある。直線の組み合わせによる近似では入力項目が多くなり、複雑になる。また、じん性の大きな領域まで取り扱えると、骨格曲線において負の剛性が生じることがある。構造物の運動方程式においては、加速度項、速度比例項が重ね合わされるので、必ずしも剛度の係数行列式が負になるとは限らないが、一般的には骨格曲線が最大荷重後に除荷過程を有する場合には、負の剛性が生じることを考える必要がある。

さらに、骨格曲線に実験や解析的に得られたものを直接用いることができれば、動的解析の計算過程で断面釣合い式を満足する計算を省略できることになる。すなわち、降伏、終局の2つの代表点など、骨格曲線について非線形要素の特性値が外生的に与えられたならば、計算の途上で断面分割による計算を行う必要がない。また、事象に近いモデル化が可能になる。ここでいう「外生的」

とは、応答計算の過程で計算することなく、骨格曲線を所与のデータとして与えることをいう。

一方で、非線形多自由度解析が日常的に実施される時、より簡便な設計支援手法の開発が必要になる。そこでは、簡易モデルで全体の挙動概要が把握できることが望ましい。

以上を背景に、ここでは多自由度非線形動的解析における剛性行列の取り扱いに特に着目し、骨格曲線を外生的に与える方法について検討したところを述べる。

2 非線形解析の手法

非線形域を含む繰返し載荷試験では、さまざまな形の荷重履歴曲線を得る。この時、荷重履歴曲線を包絡する曲線を骨格曲線と呼ぶ。一方向載荷試験では、変形は単調増加して終局に至るが、繰返し載荷条件下では、曲げ終局状態に至る前に曲げせん断が終局状態に至ることがある。ここでは、さまざまな破壊モードを勘案した上で、骨格曲線は一方向載荷状態における荷重変位曲線の包絡線の一部である、と仮定して議論を進める。

非線形解析を行うに際し、材料の非線形問題を扱うのに、応力ひずみの構成行列を変換行列の3重積を介して、体積積分することで、部材の剛性行列を与えることがある¹⁾。これらは大きなプログラムになり、かつ、実用において制約が大きい。

また、対象をはり要素と限定した上で、剛性行列が曲げ剛度EIの関数で構成されることに着目し、解析を行うことも多い。EI(E:ヤング率、I:断面2次モーメント)は曲率の関数として定義した上で、非線形領域に至ったときに、M-φ曲線での勾配を用いて解析する。ここでは、非線形要素を区分して要素設定する必要があり、全体の剛性行列を作るときには、多くの自由度が必要となる。

そこで、塑性ヒンジを有する場合の非線形多自由度解析の方法、解の収束方法について考察すると同時に、さまざまな形の部材非線形特性を考えるとすることとする。

多自由度動的な非線形解析における一般的な手続

きは[文献2]などに述べられている。定加速度法によるならば、現状をサフィックスoで現わし、時間間隔をh(sec)とすると、時間h後の状態ベクトルを得る運動方程式は以下のように定式化される。ここでは変位段階ごとに剛性が変化する場合の定式化を考える。

$$m\Delta\dot{v} + c_0\Delta\dot{v} + k_0\Delta v = -mL(\ddot{v}_g(t+h) - \ddot{v}_g(t)) \quad (1)$$

$$\tilde{k}_c\Delta v = \Delta\tilde{p}_c \quad (2)$$

$$\tilde{k}_c = k_0 + \frac{2}{h}c_0 + \frac{4}{h^2}m \quad (3)$$

$$\Delta\tilde{p}_c = \Delta p + 2c_0\dot{v}_0 + m\left[\frac{4}{h}\dot{v}_0 + 2\ddot{v}_0\right] \quad (4)$$

$$\Delta\dot{v} = \frac{2}{h}\Delta v - 2\dot{v}_0 \quad (5)$$

$$\dot{v} = m^{-1}[p - f_0 - f_s] \quad (6)$$

ここで、m:質量行列、c:減衰行列、k:剛性行列、p:外力ベクトル、f₀:減衰力ベクトル、f_s:復元力ベクトル、v:節点変位ベクトル、 \dot{v} :節点速度ベクトル、 \ddot{v} :節点加速度ベクトルである。Lは係数行列、 $\ddot{v}_g(t)$ は地動加速度、tは時間(sec)、 Δ は増分記号である。

モデルとして図-1のような単柱を考える。ここでの剛性行列は式(7)を考えることができる。剛性行列を作成するときには、既成のプログラムを用いることができる。

$$[k] = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ \text{sym.} & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (7)$$

次に材料が非線形挙動する時の系の応答に関する定式化を考える。この時、剛性行列は応答変位の関数になる。

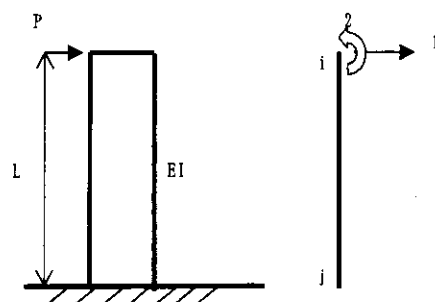


図-1 基本モデル系

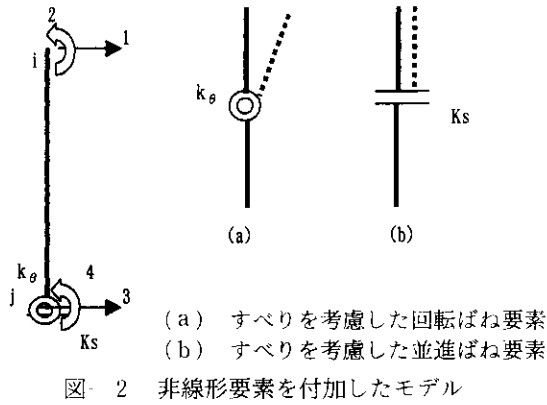


図-2に、柱基部において非線形挙動することを考える。この時、節点jにおいて、例えば回転変形を生じることが考えられるので、ここに新たに自由度を与えることとする。単柱構造で柱基部の並進・回転の2自由度成分が非線形挙動をすると考えられるときには、式(8)、(9)のような剛性行列を考える。式(10)は式(7)を4行4列の剛性行列にして、式(8)、(9)を重ね合わせたもので、並進ばねも回転ばねも見かけ上では同等に表現される。それぞれのばねは部材座標系において両端での相対変位の関数になっている。

$$[k_s] = \begin{pmatrix} k_s & -k_s \\ \text{sym.} & k_s \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$[k_\theta] = \begin{pmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ \text{sym.} & k_\theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[k] = \begin{pmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \text{sym.} & & 12EI/L^3 + k_s - 6EI/L^2 & \\ & & & 4EI/L + k_\theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

これを一般の荷重変位曲線と比較する。一般の荷重変位曲線は、節点iに荷重が加えられたときの節点iにおける荷重と変位の関係を示すものである。この節点iの変位は要素ijの弾性変形分と節点jにおける変形の和である。すなわち、図-3において弾性変形分を除去すれば、図-4のように節点jのみの荷重変位関係を反映した節点iでの荷重変位関係が得られる。要素が弾性変形を呈し、節点は剛体変形をするので、弾性変形の間、

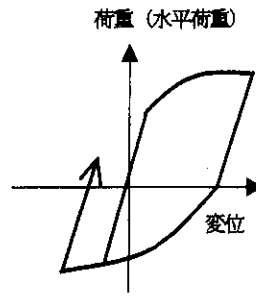


図-3 節点iにおける荷重変位曲線

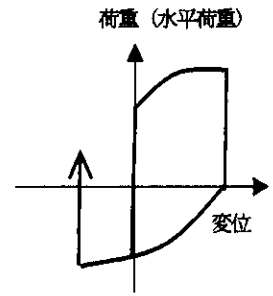


図-4 弾性変形分を除去した節点iにおける荷重変位曲線

節点の剛性は無限大と考えなければならない。ただ、実計算では無限大を与えることは計算誤差の問題があって、十分に剛性が大きい値をもって無限大とみなす。

曲げにおける多くの節点ばねでは、曲げ一曲率の非線形関係が与えられるのに対し、図-2における曲げに関する変位量は回転角である。そこで、非線形曲率ばねと等価な非線形回転ばねを考えることとする。

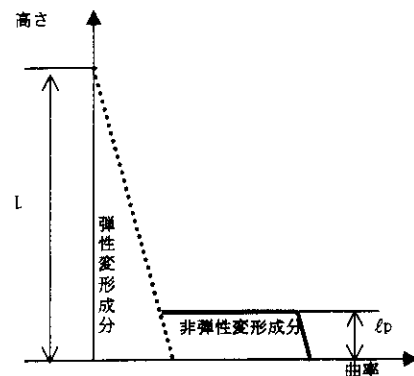


図-5 塑性ヒンジを考えたときの曲率分布

図-5は部材軸線長に沿った曲率分布で道路橋方書³⁾にも示されている。このような一種の変形関数を仮定することで、入力、計算が著しく簡略化される。非線形曲率成分を考えたとき、荷重載荷点における水平変位が等価であると考え、いま、L：要素長さ、 l_p ：塑性ヒンジ長さ、 κ ：塑性ヒンジ係数で $\kappa = l_p/L$ 、 Δu ：荷重点変位増分、 ΔM ：曲げモーメント増分、 $\Delta \phi$ ：曲率増分、 $\Delta \theta$ ：換算回転変形増分、 k_θ ：曲げ曲率関係における剛度、 k_ϕ ：曲げ回転角関係における剛度、とし、節点jにて部材力が所要の降伏曲げモーメン

トを超えて非線形挙動をしているとすると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \Delta \theta L \\
 &= \Delta \phi \ell_p (L - l_p / 2) \\
 \Delta \theta &= \Delta \phi \ell_p (1 - \alpha / 2) \\
 \therefore k_\phi &= \Delta M / \Delta \phi \\
 \therefore k_\theta &= \Delta M / \Delta \theta \\
 &= k_\phi / \ell_p (1 - \alpha / 2) \quad (11)
 \end{aligned}$$

このことは、曲げ曲率関係剛度 k_ϕ が与えられたとき、横軸を $\ell_p (1 - \alpha / 2)$ 倍することで、曲げ回転角関係 k_θ が得られることを示している。

3 骨格曲線

非線形要素としてはすべりを考慮した並進モデルと、同じく曲げ曲率モデルの2つを考えた。すべりとは一定荷重が作用したとき、非線形変形を生じるものをいう。曲げ曲率モデルにおいて骨格曲線を得るには、断面を分割して断面力を計算する方法で求める。これは道路橋示方書³⁾に示された方法である。拘束効果を考慮したコンクリートのじん性についても同様に道路橋示方書⁴⁾に従うものとする。これにより、降伏荷重、終局変位、終局荷重など、骨格曲線のパラメータ入力が可能で、骨格曲線を外生的に与えることができる。

モデルでは変動軸力を無視している。ラーメンなどの構造物では地震時に作用軸力は変動する。その時々骨格曲線は変化するが、骨格曲線を外生的に与えるときには、この効果は、簡単化のため無視できるものと仮定して、静的な軸力だけを対象にしているのである。

さらに、骨格曲線を考えるときには、せん断や曲げせん断の影響を考える必要がある。終局曲げにいたる前にせん断破壊するときには、その点を終局としなければならない。

荷重変位曲線とは単純な一方向載荷のときの関係を表すものであるが、繰返し載荷のときには骨格曲線と考えることもできると仮定している。各種実験結果を観察後、繰返し荷重履歴のあるとき

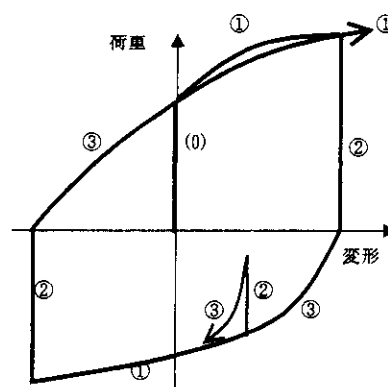


図-6 非線形要素における荷重履歴曲線とステップ番号

の荷重履歴曲線を図-6のように考えた。初期の剛結の段階を除く非線形領域では、3段階のstepで示されると考えた。

最初は要素が弾性域の挙動を繰り返して、非線形領域に至らない場合(0)で、節点が剛体変形する場合である。この時、履歴はY軸上を動くだけになる。降伏値を超えた後、①は要素が初期載荷の段階にある場合で、最大(最小)値が更新される。②は荷重解放の段階にある場合で、①からの荷重除荷の過程である。この時の剛性は初期降伏剛性に同じと考えた。荷重の符号と荷重変化量の符号が異なる。③は既往最大荷重指向の段階で、②以降で発生し、荷重の符号と荷重増分量の符号が同一である。最大(最小)値を超えた段階で、①に変化する。ここで、①が線形のときがバイリニアである。

繰返し載荷試験の骨格曲線として外生的に与えるものは①であり、図-7のように、4つのケースを考えた。Yは降伏、Uは終局、Pは作用荷重、 δ は変形を示す。ここで、(a)はバイリニアモデル、(b)は一般曲線モデル、(c)が最大耐力後、復元力の低減があるモデルで、最大耐力後には負の剛性を持つ。C50、C90は入力の際、可変数として扱えるようにしている。ケース(c)では、終局荷重は最大荷重と同じではない。さらに、(d)はゴムのような弾性非線形の場合で、非線形域でハードニングを伴う。エネルギー吸収を伴わないので、除荷時には経路をたどって原点に戻る。いずれの場合でも、終局状態は荷重でなく、変位で規定される。曲線

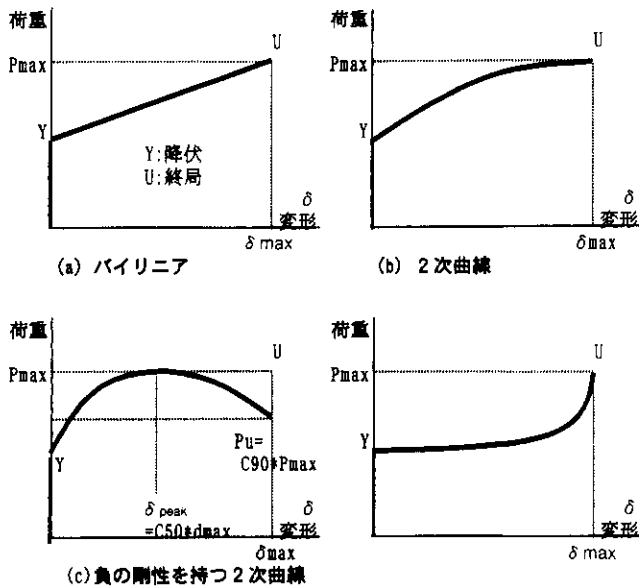


図-7 さまざまな骨格曲線

近似では、扱いの容易な2次放物線とした。

一般に荷重変位関係を考えるとき、変形を与えると変形と逆向きに復元力が作用する。これを「正の剛性」と呼ぶならば、「負の剛性」とはプラスの荷重が作用したときに、マイナスに変位が発生する場合をいう。すなわち、荷重を減少させても、変形が増加することになる。このことは、変位制御の実験において最大荷重後を追求めたとき、変位が増大しても荷重の緩和が見られるときに現れる。はり要素で軸力剛性を考慮したとき、軸力は曲げに対して負の剛性として作用する。これも負の剛性の一例である。

現実的な荷重変位を求めるときには、動的な解析であっても、このモデル化が求められる。塑性崩壊解析のときには直接的に必要な。最大荷重に達した後、系が破壊に至り、最大荷重後の過程を追跡できないためである。

4 剛性が変化するときの収束の方法

剛性行列が曲線るとき、初期剛性を直線として扱うので、部材力において不釣り合い力が生じる。文献1、文献2ではこの力を準外力として荷重項に作用させる方法を示している。

ところが、stepの勾配が不連続な場合には、この

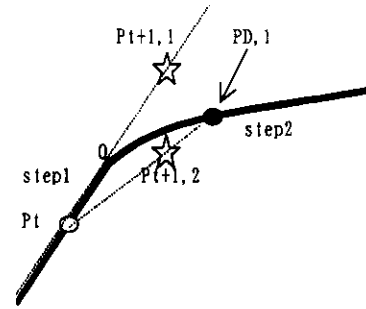


図-8(a) 異なるステップ間における計算

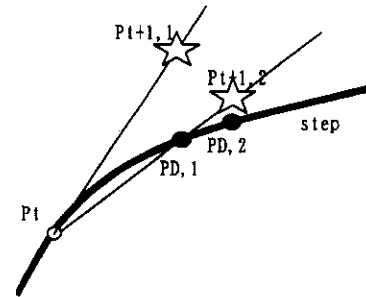


図-8(b) 同一のステップ内における計算

扱いは困難である。部材剛度を変化させないときには、部材力の評価が正しく行われなくなる。このときには図-8(a)のように考え、全体の釣り合い式を満足させながら、剛性の大きさを繰返し計算を行う必要がある。

骨格曲線は外生的に与えられているので、部材系における荷重変位関係では与えられた骨格曲線に従わなければならない。時間 t のとき P_t に解が得られているとする。式(1)の解は P_t の延長線上に得られる。図では、次の時間 $P_{t+1,1}$ では step 1 から step 2 に移行していることを示す。2回目の計算で目標値を PD に定めた上で計算し、図の位置に $P_{t+1,2}$ が得られたならば、実剛度は2つの直線間に存在することが分かるので、以降はこの間で PD の位置を探ることで、収束値を得る。step が変わらないときには、図-8(b)により、直接的な繰返し計算で収束値を求める。

複数の要素がある時、一度 step 2 に移っても、繰返しの計算の中で step 1 に戻る場合もありうる。いかなる場合でも収束するかは明らかでないが、step が変化するときには有効な方法である。また、各時間区分の中で釣り合い式は満たされる。

5 計算例

5.1 塑性崩壊解析

塑性崩壊解析とは多自由度の非線形構造物で、荷重分布を一定に保ったまま、変位を徐々に増加させ、破壊に至るまでの荷重と変位の関係を求めるものと考えられる⁴⁾。系が与えられたとき、動的解析を行う以外に、破壊のメカニズムの概略を求める有効な手法である。いま、2つの非線形要素が非線形挙動を示すように降伏条件を与えた。曲げにおいては負の剛性を持つことができると仮定した。

非線形要素の入力例は図-2における自由度3, 4にそれぞれ図-7(c)の特性を持つ要素を与えることとした。要素3には並進ばねを与え、降伏荷重6 kN, 最大荷重8 kN, 終局変位1 cm, その時の終局荷重を4 kNとした。要素4には曲げ曲率ばねを与え、降伏荷重500 kN·cm, 最大荷重900 kN·cm, 終局曲率変位0.001 rad/cm, その時の終局荷重を450 kN·cmとした。また、自由度4では塑性ヒンジ長10 cm, 塑性ヒンジ係数0.2とした。

このようにして、自由度1に荷重を与えて変位を漸増させて、非線形要素の断面力と相対変位を終局にいたるまで求めた。結果を図-9に示す。

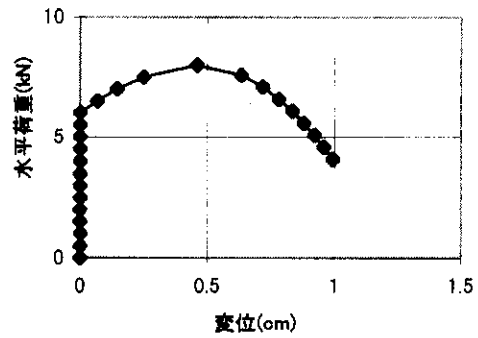
最初に自由度4で500 kN·cmが作用したとき、自由度4は非線形挙動を始める。次いで、自由度3で6 kNが作用したとき、自由度3は非線形挙動を始める。

自由度3に8 kNが作用したとき、自由度3はピークを迎え、以降変位制御的に挙動を継続する。自由度4は除荷の過程で再び無限大の剛性を持つ。自由度3の変位が1 cmにいたったとき、自由度3は終局を迎え、同時に系は終局となり計算を終了する。自由度3が負の剛性を持つときには、他の自由度4は回復過程を示すのである。

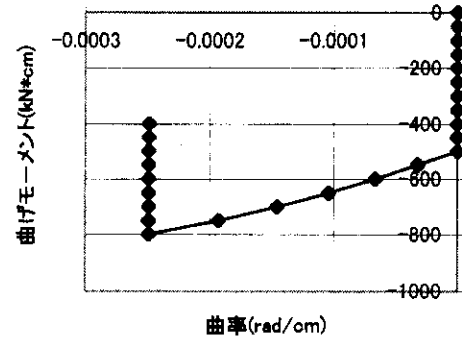
図-9(c)は自由度1における外力と変位図を示している。自由度3, 4が無限大の剛性をもつ間の変形は、はり要素ijの弾性変形である。

5.2 多自由度非線形計算

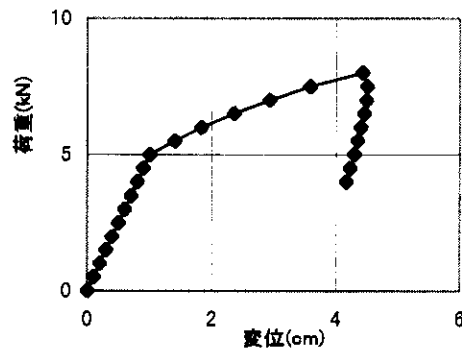
一般に多自由度問題では、複数部材を考えなけ



(a) 自由度3の荷重変位曲線



(b) 自由度4の荷重変位曲線

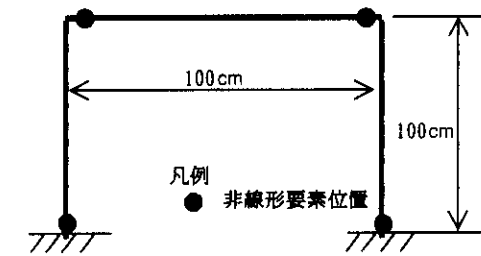


(c) 節点iにおける荷重変位関係

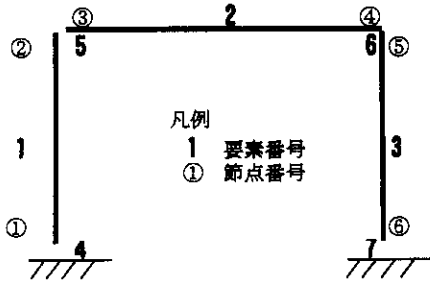
図-9 塑性崩壊解析の事例

ればならない。図-10に一層門柱の場合の可能な塑性ヒンジの位置を示した。解析に当たっては、全体の剛性行列を作成した上で図に示された位置に塑性ヒンジの候補を組み入れることになる。図-10(a)は構造図、(b)は節点番号および要素番号、(c)は自由度番号である。

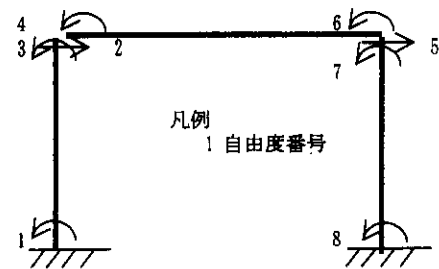
弾性係数は $E=1.6667 \times 10^3$ [kN/cm²]、部材長さ100 cmは一定とし、各要素について要素1で $I=10000$ [cm⁴]、要素2で $I=5000$ [cm⁴]、 $A=1000$ [cm²]、要素3で $I=20000$ [cm⁴]とした。 I は断面二次モーメント、 A は断面積である。自由度2, 5にそれぞれ質量10 ton (0.1 kN sec²/cm)を



(a) 構造図



(b) 節点番号および要素番号

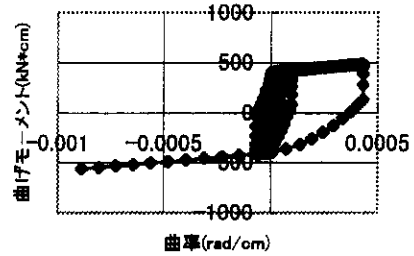


(c) 自由度番号

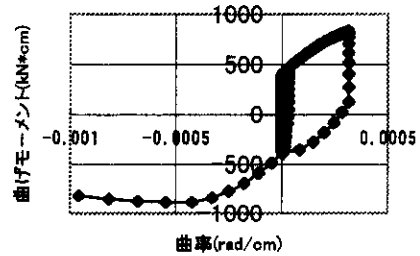
図-10 多自由度非線形解析モデル

与え、その他には対角項にのみ無視できる質量を与えた。減衰行列は質量行列に比例とし、減衰定数5%を直接与えた。自由度2、5に外力として時間間隔を0.005 secとした兵庫県南部地震の神戸海洋気象台波NS成分を与えた。

非線形要素としては(b)に示されるように節点番号①、②-③、④-⑤、⑥に要素番号4、5、6、7の順に4つの曲げ曲率ばねを配した。それぞれ、降伏モーメントは400 [kN・cm]、400 [kN・cm]、4,000 [kN・cm]、4,000 [kN・cm]、終局モーメントは、900 [kN・cm]、900 [kN・cm]、9,000 [kN・cm]、9,000 [kN・cm]、終局曲率は0.01、0.001、0.01、0.01、とし終局モーメントは最大モーメントの90%とした。要素番号2のほりの曲げ剛性が最も小さいので、節点②-③では、ヒンジは③側に形成される。骨格曲線はいずれも、図-7の(c)を用い、塑性ヒンジ長は10cm、塑性ヒンジ係数 $\alpha=0.1$ とした。



(a) 要素4の荷重変位関係



(b) 要素5の荷重変位関係

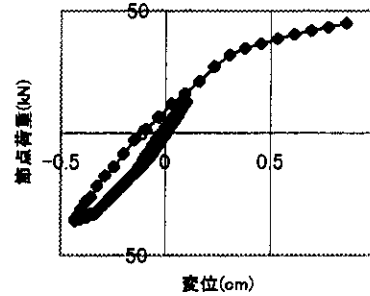


図-11 多自由度モデルの解析例

図-11には曲げ曲率ばねのうち、(a)には要素番号4の曲げ曲率関係、(b)には要素番号5の曲げ曲率関係、(c)には節点②における水平方向の荷重変位関係の計算結果を示した。要素2で終局変形が曲率 -0.001rad/cm に至る直前の時点で計算は中断されたことがわかる。また、終局時に一部負の剛性が発生していることがわかる。

6 まとめと課題

非線形要素において、骨格曲線を外生的に与えることができると仮定した上で、多自由度非線形の動的解析を行うときの簡易的な方法について、方法論の開発と具体的な解析事例をもって考察を加えた。本論は次の3点に集約される。

1. 骨格曲線を外生的に与える手法についての考察を行い定式化した。このことで多自由度非線

- 形問題が比較的簡単に扱えることを示した。
2. 塑性崩壊解析の解析例を示した。負の剛性を示す事例を示した。
 3. 多自由度非線形解析の解析例を示した。

検討にあたり、種々の仮定を設けた。これらは今後実証される必要がある。たとえば、以下である。

1. 骨格曲線と荷重履歴曲線の包絡線との関係
2. 軸力の変動の骨格曲線への影響
3. 複数の非線形要素がある時の収束の条件

さらに、節点における荷重変位関係において、一部収束の問題が解決されないことがあり、課題として残っている。

なお、本文中、ゴムは弾性非線形として述べたが、HDR等減衰を持つ材料では履歴を考える必要がある。また、ここでは方法論を述べたにとどまり、実挙動との整合性を具体的に検討したものではない。非線形の動的解析には一般に正しい値の特定が困難であるから、今後他の解析結果、実験結果などと比較検証を行っていくことが必要と考えている。

参考文献

- 1) 土木学会：動的解析の方法，動的解析と耐震設計第2巻，chap.3.3，技報堂出版，1987.7.
- 2) Clough, R.W. and Penzien, J., "Dynamics of Structures Second Edition", Chap. 15, McGraw-Hill, 1993.
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書V耐震設計編 pp.127, 平成8年12月.
- 4) 日本道路協会：道路橋示方書V耐震設備編 pp.170, 平成8年12月.
- 5) Priestly, M.J.N., Seible, F. and Calvi, G.M. 川島一彦監訳，"橋梁の耐震設計と耐震補強"，pp.370，技報堂出版，1998.